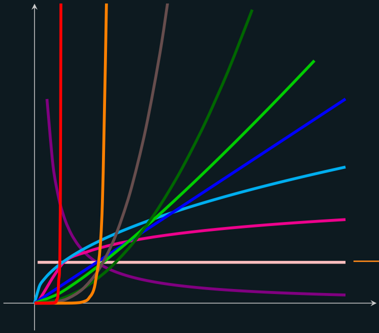


יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 01 - ניתוח אסימפטוטי

מה זה אלגוריתם?

מה זה אלגוריתם?

אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

מה זה אלגוריתם?

אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

סיבוכיות זמן - מספר הפעולות ה*בסיסיות* שהאלגוריתם מבצע כתלות בגודל הקלט (עד כדי קבוע שתלוי בחומרה ובתוכנה).

מה זה אלגוריתם?

אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

סיבוכיות זמן - מספר הפעולות ה*בסיסיות* שהאלגוריתם מבצע כתלות בגודל הקלט (עד כדי קבוע שתלוי בחומרה ובתוכנה).

Size of Largest Problem Instance
Solvable in 1 Hour

Time complexity function	With present computer	With computer 100 times faster	With computer 1000 times faster
n	N_1	$100\ N_1$	$1000\ N_1$
n^2	N_2	$10\ N_2$	$31.6\ N_2$
n^3	N_3	$4.64\ N_3$	$10\ N_3$
n^5	N_4	$2.5\ N_4$	$3.98\ N_4$
2^n	N_5	$N_5+6.64$	$N_5+9.97$
3^n	N_6	$N_6+4.19$	$N_6+6.29$

זמני ריצה של אלגוריתם עבור מהירות חישוב של מליון פעולות בשנייה.
[גארי וג'ונסון *Computers and Intractability* 1979]

מה זה אלגוריתם?

אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

סיבוכיות זמן - מספר הפעולות ה*בסיסיות* שהאלגוריתם מבצע כתלות בגודל הקלט (עד כדי קבוע שתלוי בחומרה ובתוכנה).

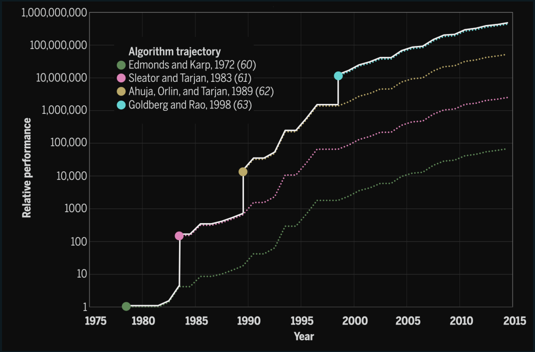
Time complexity function	Size n 10	20	30	40	50	60
n	.00001 second	.00002 second	.00003 second	.00004 second	.00005 second	.00006 second
n^2	.0001 second	.0004 second	.0009 second	.0016 second	.0025 second	.0036 second
n^3	.001 second	.008 second	.027 second	.064 second	.125 second	.216 second
n^5	.1 second	3.2 seconds	24.3 seconds	1.7 minutes	5.2 minutes	13.0 minutes
2^n	.001 second	1.0 second	17.9 minutes	12.7 days	35.7 years	366 centuries
3^n	.059 second	58 minutes	6.5 years	3855 centuries	2×10^8 centuries	1.3×10^{13} centuries

גודל הבעיות אשר ניתן לפתור בשעה של חישוב.
[*Computers and Intractability* גארי וג׳ונסון 1979]

מה זה אלגוריתם?

אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

סיבוכיות זמן - מספר הפעולות ה*בסיסיות* שהאלגוריתם מבצע כתלות בגודל הקלט (עד כדי קבוע שתלוי בחומרה ובתוכנה).



מספר הבעיות שניתן לפתור ב"זמן סביר" באמצעות המחשב הכי חזק בתקופה.
[There’s plenty of room at the Top, Science 2020]

מה זה אלגוריתם?

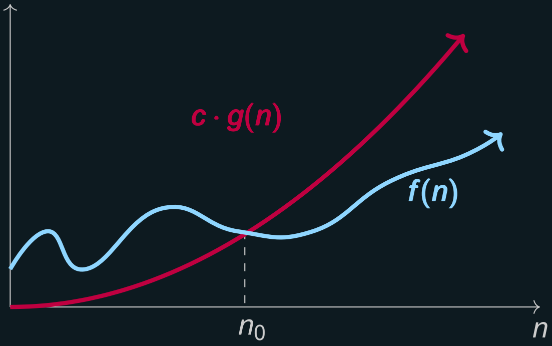
אלגוריתם רצף צעדים המוגדרים היטב לפתרון של משימה או בעיה.

סיבוכיות זמן - מספר הפעולות ה*בסיסיות* שהאלגוריתם מבצע כתלות בגודל הקלט (עד כדי קבוע שתלוי בחומרה ובתוכנה).

כדי לנתח זמני ריצה ללא תלות בחומרה ובתוכנה, נספור את מספר הפעולות הבסיסיות תוך הזנחת קבועים. כדי להזניח קבועים תוך התחשבות בערכי קלט גדולים, נשתמש במתמטיקה אסימפטוטית.

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

מה זה חסם?



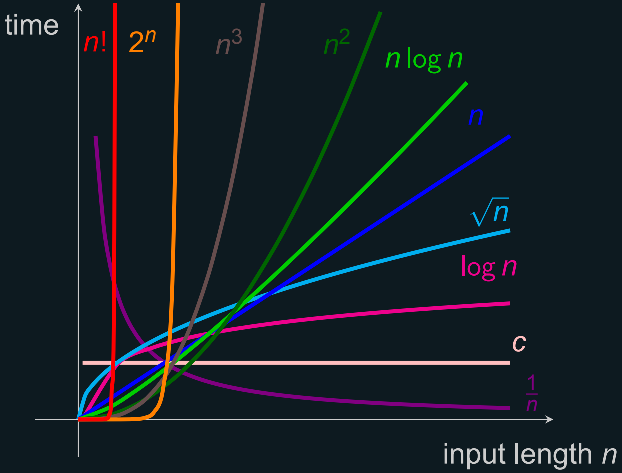
איור 1: הפונקציה g היא חסם עליון של f כי היא גדולה ממנה (עד כדי קבוע c) לכל ערך של n הגדול מהקבוע n_0.

נוטציית Big-O

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in o(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	$f(n) < c \cdot g(n)$
$f \in \Omega(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f(n) \geq c \cdot g(n)$
$f \in \omega(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$	$f(n) > c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$g \in \mathcal{O}(f)$ וגם $f \in \mathcal{O}(g)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

כאשר $n_0 \in \mathbb{N}$ כמו גם $c, c' \in \mathbb{Q}^+$ והתנאי מתקיים לכל $n > n_0$.

פונקציות סיבוכיות נפוצות



איור 2: פונקציות סיבוכיות נפוצות

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

תרגיל 1

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 5n}{n^2}$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 5n}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(10 + \frac{5}{n})}{n^2}$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 5n}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(10 + \frac{5}{n})}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 10 + \frac{5}{n}$$

תרגיל 1

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 5n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(10 + \frac{5}{n})}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} 10 + \frac{5}{n} \\
&= 10
\end{aligned}$$

תרגיל 1

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 5n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(10 + \frac{5}{n})}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} 10 + \frac{5}{n} \\
&= 10 < \infty
\end{aligned}
$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

ע״פ ההגדרה השנייה:

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$f(n) = 10n^2 + 5n \qquad = c \cdot g(n)$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$f(n) = 10n^2 + 5n \leq 10n^2 + 5n^2 \qquad = c \cdot g(n)$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$f(n) = 10n^2 + 5n \;\le\; 10n^2 + 5n^2 \;=\; 15n^2 = c \cdot g(n)$$

תרגיל 1

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$f(n) = 10n^2 + 5n \leq 10n^2 + 5n^2 = 15n^2 = 15 \cdot g(n)$$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(n) = 10n^2 + 5n$.
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n^2)$.
מצאו קבועים c ו n_0 מתאימים.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$f(n) = 10n^2 + 5n \;\le\; 10n^2 + 5n^2 \;=\; 15n^2 = 15 \cdot g(n)$$

ולכן אי השוויון מתקיים עבור כל n (ניקח למשל $n_0 = 1$) כש $c = 15$.

תרגיל 2

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

תרגיל 2

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}$$

תרגיל 2

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} n$$

תרגיל 2

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n$$

$$= \infty$$

תרגיל 2

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n$$

$$= \infty < \infty \ \lightning$$ סתירה

תרגיל 2

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \ \leq \ c \cdot g(n)$$

תרגיל 2

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \ \leq \ c \cdot g(n)$$
$$n^2 \ \leq \ c \cdot n$$

תרגיל 2

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \; : \; f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$n^2 \leq c \cdot n \qquad \Big| \text{ נחלק את שני הצדדים ב } n$$

תרגיל 2

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \le c \cdot g(n)$$

$$n^2 \le c \cdot n$$ | נחלק את שני הצדדים ב n

$$n \le c$$

תרגיל 2

הוכיחו את הטענה $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \;:\; f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$n^2 \leq c \cdot n \qquad \Big|\ \text{נחלק את שני הצדדים ב } n$$

$$n \leq c$$

זוהי כמובן סתירה משום ש n אינו מוגבל ואילו c קבוע. גם אם אי השוויון מתקיים עבור n_0 כלשהו, הוא לא מתקיים עבור $n = n_0 + c$ לכן $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$.

תרגיל 3

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\lg(n))$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \Omega(g)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f(n) \geq c \cdot g(n)$

תרגיל 3

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

נתחיל עם חישוב עזר קצר:

$$20\log(n) + 55\log_{20}(n)$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

נתחיל עם חישוב עזר קצר:

$$20\log(n) + 55\log_{20}(n) = \frac{20\lg n}{\lg 10} + \frac{55\lg n}{\lg 20}$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\lg(n))$

נתחיל עם חישוב עזר קצר:

$$20\log(n) + 55\log_{20}(n) = \frac{20\lg n}{\lg 10} + \frac{55\lg n}{\lg 20} = \left(\frac{20}{\lg 10} + \frac{55}{\lg 20}\right)\lg n$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

נתחיל עם חישוב עזר קצר:

$$20\log(n) + 55\log_{20}(n) = \frac{20\lg n}{\lg 10} + \frac{55\lg n}{\lg 20} \quad = \left(\frac{20}{\lg 10} + \frac{55}{\lg 20}\right)\lg n$$

נגדיר אם כך $c' = \frac{20}{\lg 10} + \frac{55}{\lg 20}$

(הביטוי c' קבוע ואינו תלוי ב n).

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\,\lg(n)\,)$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \Omega(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f(n) \geq c \cdot g(n)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n)}{20\log(n)+55\log_{20}(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \Omega(g)$	$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f(n) \geq c \cdot g(n)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n)}{20\log(n) + 55\log_{20}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n)}{c' \cdot \lg(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \Omega(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f(n) \geq c \cdot g(n)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n)}{20\log(n)+55\log_{20}(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n)}{c'\cdot\lg(n)}\\ &= \frac{1}{c'}\end{aligned}$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n)}{20\log(n)+55\log_{20}(n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n)}{c'\cdot\lg(n)}$$
$$= \frac{1}{c'} < \infty$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c\cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \ = c' \lg n = c' \cdot g(n)$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \ = c' \lg n = c' \cdot g(n)$$

אם ניקח את $c = c'$ אז $f(n) = c \cdot g(n)$ לכל n.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0\ :\ f(n)\ = c' \lg n = c' \cdot g(n)$$

אם ניקח את $c = c'$ אז $f(n) = c \cdot g(n)$ לכל n. בכך הוכחנו ש $f(n) \in \Omega(g(n))$ וגם ש $g(n) \in \Omega(f(n))$. למעשה הוכחנו משהו הרבה יותר חזק: $f(n) \in \Theta(g(n))$.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 3

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

הראה כי $20\log(n) + 55\log_{20}(n) \in \Omega(\ \lg(n)\ )$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$\forall n > n_0 \ : \ f(n) \ = c' \lg n = c' \cdot g(n)$$

אם ניקח את $c = c'$ אז $f(n) = c \cdot g(n)$ לכל n. בכך הוכחנו ש $f(n) \in \Omega(g(n))$ וגם ש $g(n) \in \Omega(f(n))$. למעשה הוכחנו משהו הרבה יותר חזק : $f(n) \in \Theta(g(n))$.
שימו לב שההוכחה תקפה כל עוד בסיס הלוגריתם קבוע ולכן $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ לכל a וb קבועים.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \geq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$	$f \in \Omega(g)$

תרגיל 4

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראה כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

תרגיל 4

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n^5)+6n}{n\log(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\log(n^5)+6n}{n\log(n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n\log(n)}{n\log(n)} + \frac{6n}{n\log(n)}\end{aligned}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c\cdot g(n)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n^5) + 6n}{n\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n\log(n)}{n\log(n)} + \frac{6n}{n\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{6}{\log(n)}
\end{aligned}$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n^5) + 6n}{n\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n\log(n)}{n\log(n)} + \frac{6n}{n\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{6}{\log(n)} \\
&= 5 < \infty
\end{aligned}$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \leq c \cdot n\log(n)$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$5n\log(n) + 6n - c \cdot n\log(n) \le 0$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \le c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \leq c \cdot n\log(n)$$

$$5n\log(n) + 6n - c \cdot n\log(n) \leq 0$$

$$n(5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n)) \leq 0$$

נניח ש $n_0 > 0$ |

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$5n\log(n) + 6n - c \cdot n\log(n) \le 0$$

$$n(5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n)) \le 0$$

נניח ש $n_0 > 0 \mid$

$$5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n) \le 0$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \le c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$5n\log(n) + 6n - c \cdot n\log(n) \le 0$$

$$n(5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n)) \le 0$$

נניח ש $n_0 > 0$ |

$$5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n) \le 0$$

$$\log(n)(5 - c) + 6 \le 0$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \le c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \leq c \cdot n\log(n)$$

$$5n\log(n) + 6n - c \cdot n\log(n) \leq 0$$

$$n(5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n)) \leq 0$$

נניח ש $n_0 > 0 \,|$

$$5\log(n) + 6 - c \cdot \log(n) \leq 0$$

$$\log(n)(5 - c) + 6 \leq 0$$

כדי לפשט את אי השוויון נוכל לחפש c שיקיים אותו בהנחה ש $n_0 = 2$
(אנחנו יודעים שפונקציית הלוגריתם היא מונוטונית, כלומר לא יורדת).

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \leq c \cdot n\log(n)$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$\log(n)(5-c) + 6 \le 0 \qquad \mid \ \log(2) \cong 0.301$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \le c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$\log(n)(5-c) + 6 \le 0 \qquad \Big| \ \log(2) \cong 0.301$$

$$24.93 \le c$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \le c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה
$f(n) = n\log(n^5) + 6n$
הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$
ע"פ ההגדרה השנייה:

$$n\log(n^5) + 6n \le c \cdot n\log(n)$$

$$\log(n)(5-c) + 6 \le 0 \qquad \Big| \ \log(2) \cong 0.301$$

$$24.93 \le c$$

לכן אי השוויון מתקיים עבור $c = 25$ ו $n_0 = 2$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

תרגיל 4

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

$$n\log(n^5) + 6n = 5n\log(n) + 6n \cdot 1$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$$\log(n^c) = c\log(n)$$

נתונה הפונקציה

$$f(n) = n\log(n^5) + 6n$$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

$$\begin{aligned} n\log(n^5) + 6n &= 5n\log(n) + 6n \cdot 1 \\ &\le 5n\log(n) + 6n\log(n) \end{aligned}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע"פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

$$n\log(n^5) + 6n = 5n\log(n) + 6n \cdot 1$$

$$\leq 5n\log(n) + 6n\log(n) \quad | \; n > 10$$

עבור $\log n \geq 1$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

$$
\begin{aligned}
n\log(n^5) + 6n &= 5n\log(n) + 6n \cdot 1 \\
&\leq 5n\log(n) + 6n\log(n) \quad | \; n > 10 \text{ עבור } \log n \geq 1 \\
&= 11n\log(n)
\end{aligned}
$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$

תרגיל 4

$\log(n^c) = c\log(n)$

נתונה הפונקציה

$f(n) = n\log(n^5) + 6n$

הראו כי $f \in \mathcal{O}(n\log(n))$

ע״פ ההגדרה השנייה:

הנה דרך נוספת להוכיח את החסם

$$
\begin{aligned}
n\log(n^5) + 6n &= 5n\log(n) + 6n\cdot 1 \\
&\leq 5n\log(n) + 6n\log(n) \quad \mid n > 10 \\
&= 11n\log(n)
\end{aligned}
$$

עבור $n > 10$ $\log n \geq 1$

לכן נוכל לקחת כקבועים גם את $n_0 = 10$ ואת $c = 11$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c\cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$
$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$	$f \in \mathcal{O}(g)$ וגם $g \in \mathcal{O}(f)$	$f \in \Theta(g)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

הגדרה 2	הגדרה 1	סימון
$f(n) \leq c \cdot g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f \in \mathcal{O}(g)$
$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$	$g \in \mathcal{O}(f)$ וגם $f \in \mathcal{O}(g)$	$f \in \Theta(g)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$f \in \mathcal{O}(g)$ וגם $g \in \mathcal{O}(f)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$f \in \mathcal{O}(g)$ וגם $g \in \mathcal{O}(f)$	$c \cdot g(n) \le f(n) \le c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} = 3 < \infty$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$f \in \mathcal{O}(g)$ וגם $g \in \mathcal{O}(f)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} = 3 < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$g \in \mathcal{O}(f)$ וגם $f \in \mathcal{O}(g)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע"פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} = 3 < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+5}$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$g \in \mathcal{O}(f)$ וגם $f \in \mathcal{O}(g)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע״פ ההגדרה הראשונה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} = 3 < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+5} = \frac{1}{3} < \infty$$

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \le c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$f \in \mathcal{O}(g)$ וגם $g \in \mathcal{O}(f)$	$c \cdot g(n) \le f(n) \le c' \cdot g(n)$

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(n) = 3n^2 + 5$ הראו כי $f \in \Theta(n^2)$ מצאו n_0 ו c מתאימים.

ע"פ ההגדרה השנייה:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot g(n) \leq & \quad f(n) & \leq c_2 \cdot g(n) \\ c_1 \cdot n^2 \leq & \quad 3n^2 + 5 & \leq c_2 \cdot n^2 \\ 1 \cdot n^2 \leq & \quad 3n^2 + 5 & \leq 8 \cdot n^2 \end{aligned}$$

ניתן לראות כי התנאים מתקיימים לכל $n > n_0 = 1$ עבור הקבועים $c_1 = 1$ ו $c_2 = 8$.

סימון	הגדרה 1	הגדרה 2
$f \in \mathcal{O}(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f \in \Theta(g)$	$g \in \mathcal{O}(f)$ וגם $f \in \mathcal{O}(g)$	$c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

ידוע כי $9n > 1$ עבור כל $n \geq 1$ | $\log(n+1) \leq \log(10n)$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

ידוע כי $1 < 9n$ עבור כל $n \geq 1$ |

$$\begin{aligned} \log(n+1) &\leq \log(10n) \\ &= \log(10) + \log(n) \end{aligned}$$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

ידוע כי $1 < 9n$ עבור כל $n \geq 1$ |

$$\begin{aligned} \log(n+1) &\leq \log(10n) \\ &= \log(10) + \log(n) \\ &= 1 + \log(n) \end{aligned}$$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

$$\begin{aligned}
\log(n+1) &\leq \log(10n) && \mid \quad \text{ידוע כי } 1 < 9n \text{ עבור כל } n \geq 1 \\
&= \log(10) + \log(n) \\
&= 1 + \log(n) \\
&\leq 1 + n && \mid \quad \text{נשתמש בהנחת האינדוקציה}
\end{aligned}$$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.
זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n + 1$ (צעד האינדוקציה).

$$\begin{aligned}
\log(n+1) &\leq \log(10n) && \text{| ידוע כי } 1 < 9n \text{ עבור כל } n \geq 1 \\
&= \log(10) + \log(n) \\
&= 1 + \log(n) \\
&\leq 1 + n && \text{| נשתמש בהנחת האינדוקציה} \\
&\leq 2n
\end{aligned}$$

תרגיל 6

הוכיחו באינדוקציה כי $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$.

זכרו! $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

נראה כי עבור $n = 1$ מתקיים $\log(n) \leq n$. (הנחת האינדוקציה):

$$\log(1) = 0 < 1$$

כעת נוכיח זאת עבור $n+1$ (צעד האינדוקציה).

$$\begin{aligned}
\log(n+1) &\leq \log(10n) && \Big| \quad \text{ידוע כי } 1 < 9n \text{ עבור כל } n \geq 1 \\
&= \log(10) + \log(n) \\
&= 1 + \log(n) \\
&\leq 1 + n && \Big| \quad \text{נשתמש בהנחת האינדוקציה} \\
&\leq 2n
\end{aligned}$$

ראינו שהנחת האינדוקציה מתקיימת עבור 1, ועל פי צעד האינדוקציה היא מתקיימת לכל n טבעי. אם כך $\log(n) \leq 2n$ עבור כל n טבעי ולכן $\log(n) \in \mathcal{O}(n)$ עבור $n_0 = c = 2$.