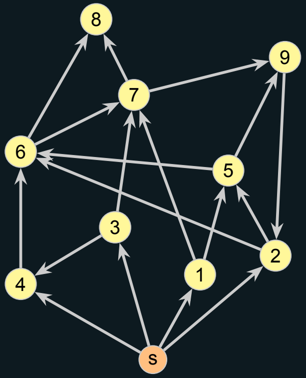
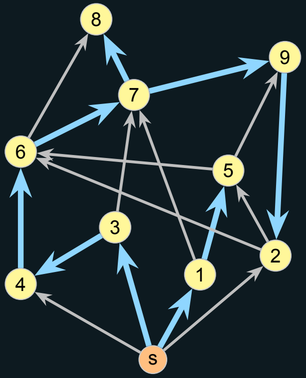


יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 08 - מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים



יסודות האלגוריתמים והסיבוכיות

תרגול 08 - מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים

מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים

דייקסטרה

גרף

משקלים

סיבוכיות זמן

מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים

דייקסטרה

גרף	מכוון/ לא מכוון
משקלים	
סיבוכיות זמן	

מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים

דייקסטרה

גרף	מכוון/ לא מכוון
משקלים	משקלים חיוביים בלבד

סיבוכיות זמן	

דייקסטרה

גרף	מכוון/ לא מכוון
משקלים	משקלים חיוביים בלבד
סיבוכיות זמן	בלי ערימה $\mathcal{O}(n^2)$

מסלולים קצרים בגרפים ממושקלים

דייקסטרה

גרף	מכוון/ לא מכוון
משקלים	משקלים חיוביים בלבד
	בלי ערימה $\mathcal{O}(n^2)$
סיבוכיות זמן	עם ערימה $\mathcal{O}(n \log n + m \log n)$

דייקסטרה

Dijkstra($G = (V, E), s$)

for $v \in V$ **do**
  Mark v as *not-visited*
  father(v) $= \varnothing$
  dist(v) $= \infty$.
dist(s) $= 0$
while There exists a *not-visited* vertex **do**
  Find the closest non-visited vertex v.
  Mark v as *visited*
  for *not-visited* $u \in N(v)$ **do**
    if dist(v) $+ w(v, u) <$ dist(u) **then**
      dist(u) $=$ dist(v) $+ w(v, u)$
      father(u) $= v$

דייקסטרה

Dijkstra($G = (V, E), s$)

for $v \in V$ **do**
    Mark v as *not-visited*
    father(v) $= \varnothing$
    dist(v) $= \infty$.
dist(s) $= 0$
Create Heap H from V sorted by dist()
while There exists a *not-visited* vertex **do**
    $v = H$.PopRoot()
    Mark v as *visited*
    for *not-visited* $u \in N(v)$ **do**
        if dist(v) $+ w(v, u) <$ dist(u) **then**
            dist(u) $=$ dist(v) $+ w(v, u)$
            H.UpdateKey(u) $=$ dist(u)
            father(u) $= v$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

א. נגדיר פונקצית משקל חדשה c_1 כך ש: $c_1(e) = a + w(e)$. אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c_1.

ב. כנ"ל אם פונקצית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

א. נגדיר פונקצית משקל חדשה c_1 כך ש: $c_1(e) = a + w(e)$. אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c_1.

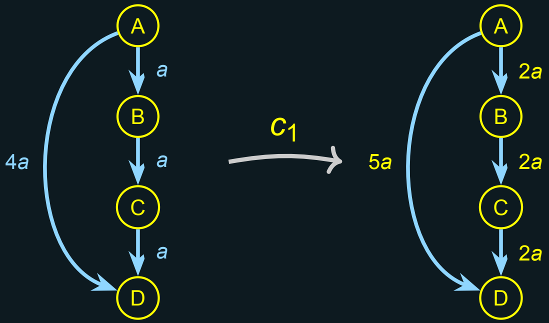
הטענה לא נכונה, נפריך באמצעות דוגמת נגד:

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

א. נגדיר פונקצית משקל חדשה c_1 כך ש: $c_1(e) = a + w(e)$. אם P הוא המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים לפי w, הוא גם הקצר ביותר לפי c_1.

הטענה לא נכונה, נפריך באמצעות דוגמת נגד:



תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף.

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e \in P} w(e) \leq \sum_{e \in Q} w(e)$. נראה ש$P$ קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e \in Q} w(e) \leq \sum_{e \in P} w(e)$.
נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e \in P} c_2(e) = \sum_{e \in P} a \cdot w(e)$$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e)=a\cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in Q} w(e) \le \sum_{e\in P} w(e)$.
נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e\in P} c_2(e) = \sum_{e\in P} a\cdot w(e) \qquad \text{| נוציא גורם משותף}$$
$$= a\cdot\sum_{e\in P} w(e)$$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e)=a\cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in Q} w(e) \leq \sum_{e\in P} w(e)$. נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\begin{aligned}\sum_{e\in P} c_2(e) &= \sum_{e\in P} a\cdot w(e) \\ &= a\cdot\sum_{e\in P} w(e) \\ &\leq a\cdot\sum_{e\in Q} w(e)\end{aligned}$$

| נוציא גורם משותף

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in P} w(e) \leq \sum_{e\in Q} w(e)$.
נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e\in P} c_2(e) = \sum_{e\in P} a \cdot w(e) \qquad | \quad \text{נוציא גורם משותף}$$

$$= a \cdot \sum_{e\in P} w(e)$$

$$\leq a \cdot \sum_{e\in Q} w(e) \qquad | \quad \text{ידוע כי } \sum_{e\in Q} w(e) \leq \sum_{e\in P} w(e)$$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e)=a\cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in P} w(e) \leq \sum_{e\in Q} w(e)$.
נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e\in P} c_2(e) = \sum_{e\in P} a\cdot w(e) \qquad | \quad \text{נוציא גורם משותף}$$

$$= a\cdot \sum_{e\in P} w(e)$$

$$\leq a\cdot \sum_{e\in Q} w(e) \qquad | \quad \text{ידוע כי } \sum_{e\in Q} w(e) \geq \sum_{e\in P} w(e)$$

$$= \sum_{e\in Q} a\cdot w(e)$$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e) = a \cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in Q} w(e) \leq \sum_{e\in P} w(e)$.
נראה שP קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e\in P} c_2(e) = \sum_{e\in P} a \cdot w(e) \qquad | \quad \text{נוציא גורם משותף}$$

$$= a \cdot \sum_{e\in P} w(e)$$

$$\leq a \cdot \sum_{e\in Q} w(e) \qquad | \quad \text{ידוע כי } \sum_{e\in Q} w(e) \leq \sum_{e\in P} w(e)$$

$$= \sum_{e\in Q} a \cdot w(e) = \sum_{e\in Q} c_2(e)$$

תרגיל 1

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל w על הקשתות, לפיה כל הקשתות בעלות משקל חיובי. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות עבור a חיובי:

ב. כנ"ל אם פונקציית המשקל היא $c_2(e)=a\cdot w(e)$.

הטענה נכונה, נוכיח אותה עבור זוג צמתים אקראי בגרף. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל t ע"פ פונקציית המשקל w, כלומר עבור כל מסלול Q מתקיים $\sum_{e\in P} w(e)\le\sum_{e\in Q} w(e)$. נראה ש$P$ קצר או שווה לכל מסלול אחר Q גם ע"פ c_2.

$$\sum_{e\in P} c_2(e)=\sum_{e\in P} a\cdot w(e) \qquad | \quad \text{נוציא גורם משותף}$$

$$=a\cdot\sum_{e\in P} w(e)$$

$$\le a\cdot\sum_{e\in Q} w(e) \qquad | \quad \text{ידוע כי } \sum_{e\in P} w(e)\le\sum_{e\in Q} w(e)$$

$$=\sum_{e\in Q} a\cdot w(e) \quad =\sum_{e\in Q} c_2(e)$$

קיבלנו ש $\sum_{e\in P} c_2(e)\le\sum_{e\in Q} c_2(e)$, מש"ל.

תרגיל 2

נתון גרף לא ממושקל, מכוון $G = (V, E)$ ותת קבוצה $W \subseteq V$ ונתונים שני צמתים $s, t \in V$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול מ-s ל-t המבקר במספר מינימלי של צמתים מ-W.

תרגיל 2

נתון גרף לא ממושקל, מכוון $G=(V,E)$ ותת קבוצה $W\subseteq V$ ונתונים שני צמתים $s,t\in V$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול מ-s ל-t המבקר במספר מינימלי של צמתים מ- W.

אנחנו רוצים לעודד את האלגוריתם שלנו לעבור בכמה שפחות קשתות שמובילות אותו לצמתים מקבוצה W. נקבע פונקציית משקל על קשתות הגרף $w:E\to\{0,1\}$ ש״קונסת״ את האלגוריתם על כל קשת שמובילה לצומת לא רצוי:

תרגיל 2

נתון גרף לא ממושקל, מכוון $G = (V, E)$ ותת קבוצה $W \subseteq V$ ונתונים שני צמתים $s, t \in V$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול מ-s ל-t המבקר במספר מינימלי של צמתים מ- W.

אנחנו רוצים לעודד את האלגוריתם שלנו לעבור בכמה שפחות קשתות שמובילות אותו לצמתים מקבוצה W. נקבע פונקציית משקל על קשתות הגרף $w : E \to \{0, 1\}$ ש״קונסת״ את האלגוריתם על כל קשת שמובילה לצומת לא רצוי:

$$w((v,u)) = \begin{cases} 0, & \text{if } u \notin W \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

תרגיל 2

נתון גרף לא ממושקל, מכוון $G = (V, E)$ ותת קבוצה $W \subseteq V$ ונתונים שני צמתים $s, t \in V$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול מ-s ל-t המבקר במספר מינימלי של צמתים מ-W.

אנחנו רוצים לעודד את האלגוריתם שלנו לעבור בכמה שפחות קשתות שמובילות אותו לצמתים מקבוצה W. נקבע פונקציית משקל על קשתות הגרף $w : E \to \{0, 1\}$ ש"קונסת" את האלגוריתם על כל קשת שמובילה לצומת לא רצוי:

$$w((v,u)) = \begin{cases} 0, & \text{if } u \notin W \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

נפעיל את דייקסטרה על צומת s ונעצור כשהגענו ל-t. מאחר ודייקסטרה מוצא את המסלול הקצר ביותר הוא ימזער את מספר הקשתות שהובילו אותו לצמתים ב-u.

תרגיל 3

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלים אי שליליים על הקשתות, פרט לקשת אחת $e=(u,v)$ בעלת משקל שלילי ונתון קודקוד s. מצא את המרחק מ s ליתר הקודקודים בגרף ע"י שימוש באלגוריתם דייקסטרה. ניתן להניח שבגרף אין מעגלים שליליים.

תרגיל 3

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלים אי שליליים על הקשתות, פרט לקשת אחת $e=(u,v)$ בעלת משקל שלילי ונתון קודקוד s. מצא את המרחק מ s ליתר הקודקודים בגרף ע"י שימוש באלגוריתם דייקסטרה. ניתן להניח שבגרף אין מעגלים שליליים.

נוריד את הקשת (u,v) ונשתמש בדייקסטרה כדי למצוא את המסלולים הקצרים מs לכל צמתי הגרף, נשמור עבור צומת את המרחק במשתנה d_1. כעת נפעיל את דייקסטרה מצומת v ונשמור עבור כל צומת את המרחק במשתנה d_2. עבור כל צומת x נחשב את המרחק המינימלי ע"י $d(x)=\min\{d_1(x),\ d_1(u)+w(u,v)+d_2(x)\}$.

מאחר והפעלנו את האלגוריתם של דייקסטרה מספר קבוע של פעמים (פעמיים) סיבוכיות הזמן זהה לדייקסטרה עם ערימה $\mathcal{O}(n\log n+m\log n)$ או בלי ערימה $\mathcal{O}(n^2)$.