תרגול 3 - מבחני טיב התאמה

מוטיבציה

בסימולציה, הרבה פעמים אנחנו לא יודעים מראש מה ההתפלגות של רכיבים במערכת.

מוטיבציה

בסימולציה, הרבה פעמים אנחנו לא יודעים מראש מה ההתפלגות של רכיבים במערכת.

לדוגמה:

- זמני הגעה של לקוחות
- זמני שירות
- זמני תיקון
- מספר אירועים ביחידת זמן

מוטיבציה

בסימולציה, הרבה פעמים אנחנו לא יודעים מראש מה ההתפלגות של רכיבים במערכת.

לדוגמה:

- זמני הגעה של לקוחות
- זמני שירות
- זמני תיקון
- מספר אירועים ביחידת זמן

נרצה לקחת נתונים אמיתיים מהמערכת, להתאים להם התפלגות הסתברותית, ואז להשתמש בהתפלגות הזאת במודל הסימולציה.

מה עושים עם נתונים מהמערכת?

תיאור המערכת

↓

איסוף תצפיות

↓

אומדן של התפלגויות שונות במערכת

↓

בניית מודל סימולציה

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

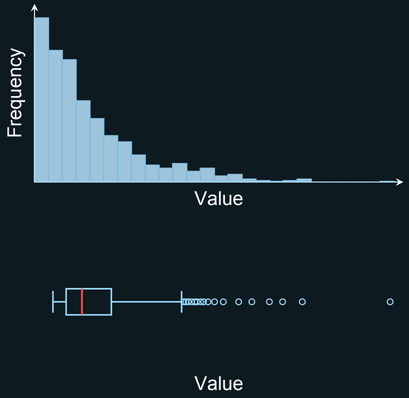
רושם ראשוני - מציאת משפחה

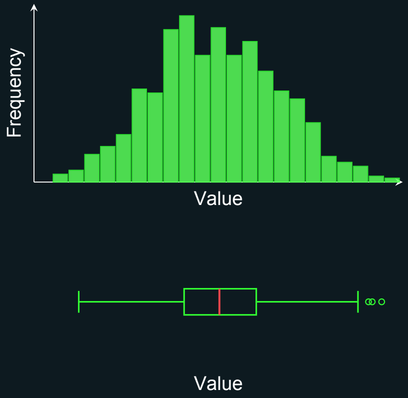
לפני מבחן סטטיסטי, כדאי להסתכל על הנתונים.

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

רושם ראשוני - מציאת משפחה

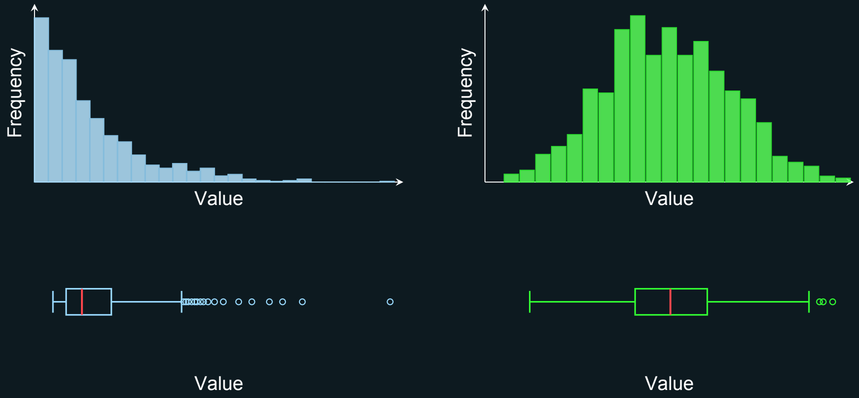
לפני מבחן סטטיסטי, כדאי להסתכל על הנתונים.





רושם ראשוני - מציאת משפחה

לפני מבחן סטטיסטי, כדאי להסתכל על הנתונים.

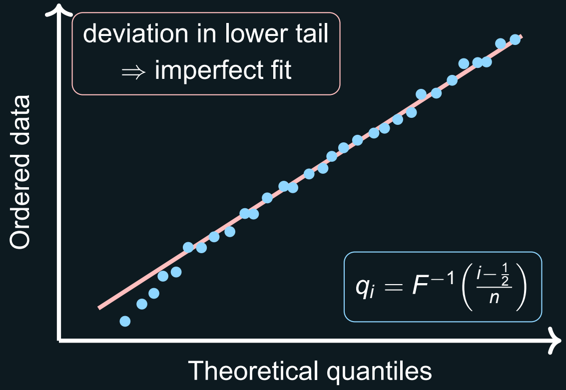


ויזואליזציה לא מוכיחה התאמה, אבל היא עוזרת לבחור משפחות מועמדות.

QQ-Plot

$$x_{(i)} \quad \text{vs.} \quad q_i = F^{-1}\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right), \qquad i = 1, \ldots, n$$

אם $x_{(i)} \approx q_i$ לכל i, הנקודות יהיו קרובות לקו ישר.



מציאת פרמטרים באמצעות MLE

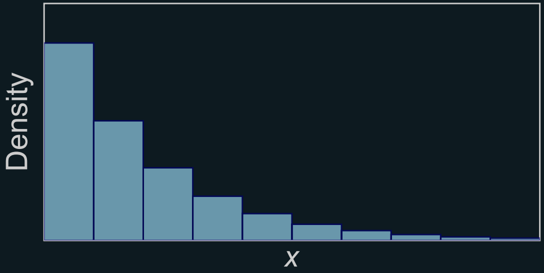
נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.

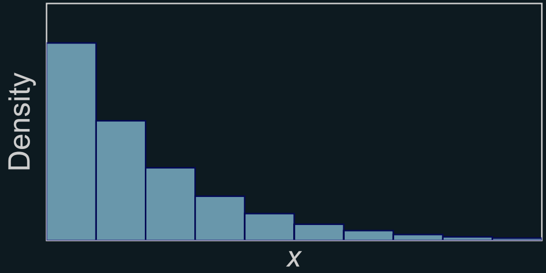
מציאת פרמטרים באמצעות MLE

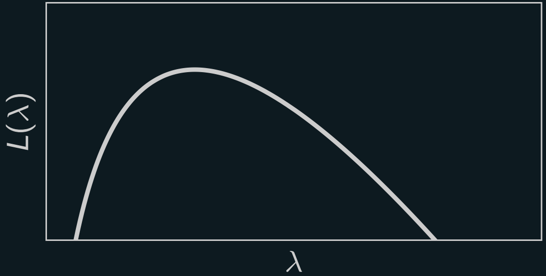
נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.



מציאת פרמטרים באמצעות MLE





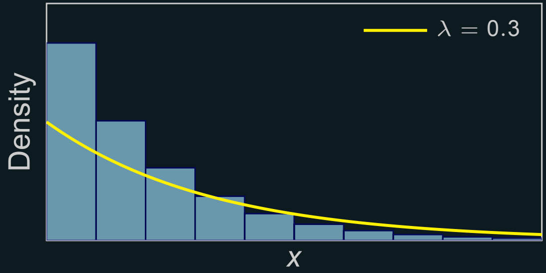
נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

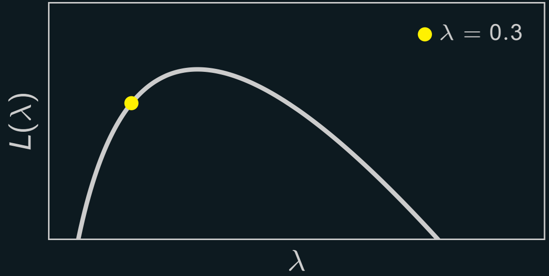
עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.

פונקציית נראות (Likelihood)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

מציאת פרמטרים באמצעות MLE





נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.

פונקציית נראות (Likelihood)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

נבחר את θ שממקסם את הנראות:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

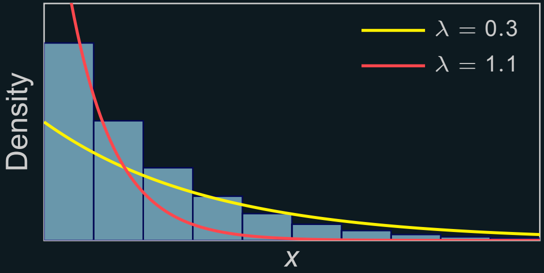
כדי להמנע ממודלים מסובכים מידי נשאף למזער את AIC ואת BIC:

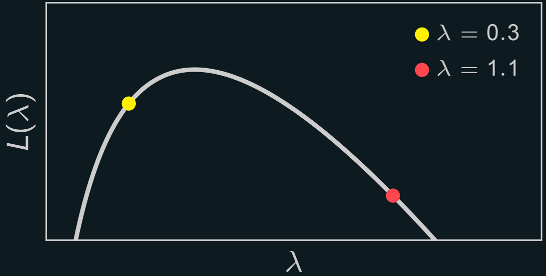
$$AIC = -2\log L + 2p$$

$$BIC = -2\log L + p\log n$$

כשמספר הפרמטרים של המודל שלנו הוא p.

מציאת פרמטרים באמצעות MLE





נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.

פונקציית נראות (Likelihood)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

נבחר את θ שממקסם את הנראות:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

כדי להמנע ממודלים מסובכים מידי נשאף למזער את AIC ואת BIC:

$$AIC = -2 \log L + 2p$$

$$BIC = -2 \log L + p \log n$$

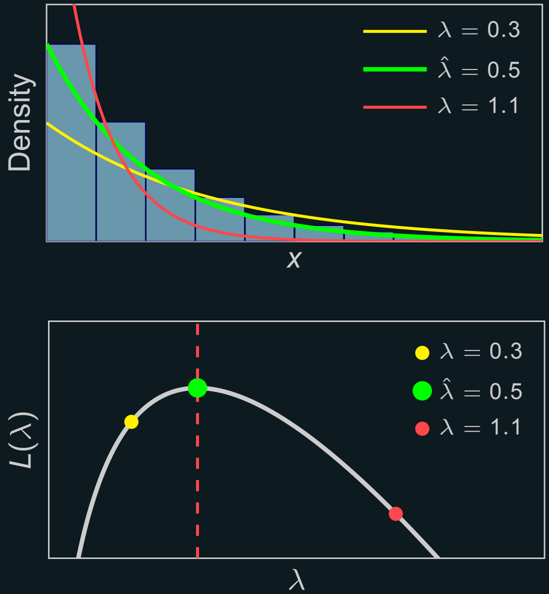
כשמספר הפרמטרים של המודל שלנו הוא p.

Ben-Gurion University of the Negev
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب

מציאת פרמטרים באמצעות MLE

נניח שבחרנו משפחה מועמדת, למשל התפלגות מעריכית.

עכשיו צריך לאמוד את הפרמטרים שלה.



פונקציית נראות (Likelihood)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

נבחר את θ שממקסם את הנראות:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta)$$

כדי להמנע ממודלים מסובכים מידי נשאף למזער את AIC ואת BIC:

$$AIC = -2 \log L + 2p$$

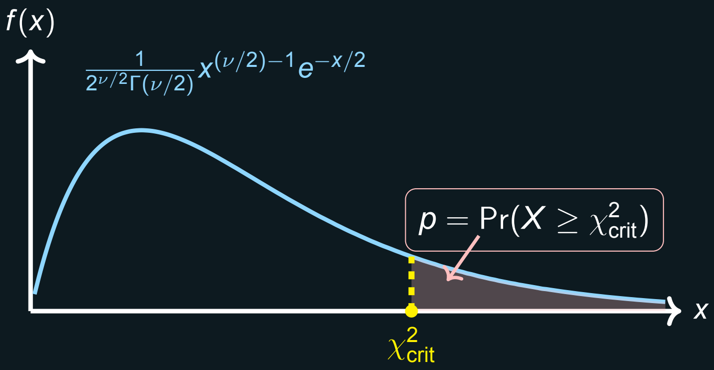
$$BIC = -2 \log L + p \log n$$

כשמספר הפרמטרים של המודל שלנו הוא p.

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

טבלת χ^2 - מה הערך בטבלה אומר?

$$X \sim \chi^2(df) \quad p = \Pr(X \geq \chi^2_{\text{crit}}) \quad \alpha = \int_{\chi^2}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}\, dx$$



$\chi^2_{\text{stat}} > \chi^2_{\text{crit}} \implies$ דוחים את H_0

מבחני טיב התאמה

אחרי שמצאנו התאמה אפשרית, נרצה לבדוק אותה סטטיסטית.

מבחני טיב התאמה

אחרי שמצאנו התאמה אפשרית, נרצה לבדוק אותה סטטיסטית.

המידע שיש בידינו:

- הנתונים X
- התפלגות מוצעת F
- פרמטרים של ההתפלגות θ

מבחני טיב התאמה

אחרי שמצאנו התאמה אפשרית, נרצה לבדוק אותה סטטיסטית.

המידע שיש בידינו:

- הנתונים X
- התפלגות מוצעת F
- פרמטרים של ההתפלגות θ

ננסח השערות:

$$H_0 : \; X \sim F(\theta)$$

$$H_1 : \; X \nsim F(\theta)$$

מבחני טיב התאמה

אחרי שמצאנו התאמה אפשרית, נרצה לבדוק אותה סטטיסטית.

המידע שיש בידינו:

- הנתונים X
- התפלגות מוצעת F
- פרמטרים של ההתפלגות θ

ננסח השערות:

$$H_0 : \; X \sim F(\theta)$$

$$H_1 : \; X \nsim F(\theta)$$

אם לא דחינו את H_0, זה לא אומר שהוכחנו שההתפלגות נכונה. זה אומר שאין לנו מספיק עדות לדחות אותה.

מבחן χ^2 - דוגמת קובייה

קובייה נזרקה 1800 פעמים. התוצאות:

Face	1	2	3	4	5	6
Observed	250	300	400	200	320	330

מבחן χ^2 - דוגמת קובייה

קובייה נזרקה 1800 פעמים. התוצאות:

Face	1	2	3	4	5	6
Observed	250	300	400	200	320	330

נרצה לבדוק האם הקובייה הוגנת.

מבחן χ^2 - דוגמת קובייה

קובייה נזרקה 1800 פעמים. התוצאות:

Face	1	2	3	4	5	6
Observed	250	300	400	200	320	330

נרצה לבדוק האם הקובייה הוגנת.

אם הקובייה הוגנת:

$$p_j = \frac{1}{6}$$

ולכן הצפי לכל תוצאה הוא:

$$1800 \cdot \frac{1}{6} = 300$$

מבחן χ^2 - חישוב

נערוך מבחן סטטיסטי ברמת ביטחון 0.9, כלומר $\alpha = 0.1$.

$$\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n \cdot p_j - N_j)^2}{n \cdot p_j}$$

מבחן χ^2 - חישוב

נערוך מבחן סטטיסטי ברמת ביטחון 0.9, כלומר $\alpha = 0.1$.

$$\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n \cdot p_j - N_j)^2}{n \cdot p_j}$$

בדוגמת הקובייה: $n \cdot p_j = 300 \qquad p_j = \frac{1}{6}, \qquad k = 6,$

מבחן χ^2 - חישוב

נערוך מבחן סטטיסטי ברמת ביטחון 0.9, כלומר $\alpha = 0.1$.

$$\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n \cdot p_j - N_j)^2}{n \cdot p_j}$$

בדוגמת הקובייה: $n \cdot p_j = 300 \qquad p_j = \frac{1}{6}, \qquad k = 6,$

$$\chi^2_{\text{stat}} = \frac{50^2}{300} + \frac{0^2}{300} + \frac{100^2}{300} + \frac{(-100)^2}{300} + \frac{20^2}{300} + \frac{30^2}{300} = 79.33$$

מבחן χ^2 - חישוב

נערוך מבחן סטטיסטי ברמת ביטחון 0.9, כלומר $\alpha = 0.1$.

$$\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n \cdot p_j - N_j)^2}{n \cdot p_j}$$

בדוגמת הקובייה: $n \cdot p_j = 300 \qquad p_j = \frac{1}{6}, \qquad k = 6,$

$$\chi^2_{\text{stat}} = \frac{50^2}{300} + \frac{0^2}{300} + \frac{100^2}{300} + \frac{(-100)^2}{300} + \frac{20^2}{300} + \frac{30^2}{300} = 79.33$$

דרגות החופש:

$$df = k - p - 1$$

כאשר p הוא מספר הפרמטרים של ההתפלגות המוצעת. במקרה של התפלגות אחידה אין פרמטרים נוספים ולכן $p = 0$ ובהתאם $\chi^2_{\text{crit}} = \chi^2_{5,0.9} = 9.24$.

משום ש $\chi^2_{\text{stat}} > \chi^2_{\text{crit}}$ נדחה את ההשערה שהקובייה הוגנת.

טבלת χ^2

df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	**9.24**	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3

$\chi^2_{\text{stat}} > \chi^2_{df,1-\alpha} \implies$ דוחים את H_0

בדוגמה: $df = 5$, $\alpha = 0.10$, ולכן בטבלה נשתמש בעמודה $1-\alpha = 0.90$, ונקבל $\chi^2_{5,0.90} = 9.24$.

טבלת χ^2

df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	**9.24**	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3

$$\chi^2_{\text{stat}} > \chi^2_{df,1-\alpha} \implies \text{דוחים את } H_0$$

בדוגמה: $df = 5$, $\alpha = 0.10$, ולכן בטבלה נשתמש בעמודה $1-\alpha = 0.90$,
ונקבל $\chi^2_{5,0.90} = 9.24$.

מבחן χ^2 להתפלגות רציפה

כאשר ההתפלגות רציפה, נבחר גבולות כך שכל מקטע יקבל הסתברות שווה לפי ההתפלגות התאורטית.

מבחן χ^2 להתפלגות רציפה

כאשר ההתפלגות רציפה, נבחר גבולות כך שכל מקטע יקבל הסתברות שווה לפי ההתפלגות התאורטית.

כלומר, עבור k מקטעים:

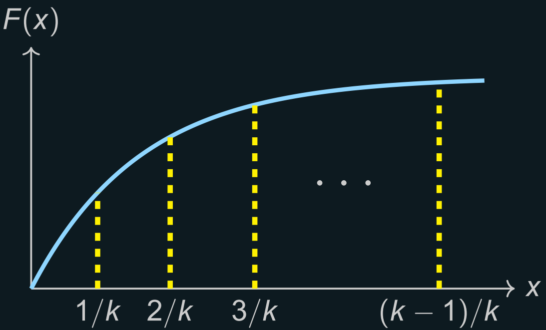
$$F(x_1) = \frac{1}{k}, \qquad F(x_2) = \frac{2}{k}, \qquad \ldots \qquad F(x_{k-1}) = \frac{k-1}{k}$$

מבחן χ^2 להתפלגות רציפה

כאשר ההתפלגות רציפה, נבחר גבולות כך שכל מקטע יקבל הסתברות שווה לפי ההתפלגות התאורטית.

כלומר, עבור k מקטעים:

$$F(x_1) = \frac{1}{k}, \qquad F(x_2) = \frac{2}{k}, \qquad \ldots \qquad F(x_{k-1}) = \frac{k-1}{k}$$



מבחן χ^2 - חלוקה למקטעים

במבחן χ^2 מחלקים את המרחב למקטעים, או “דליים”.

מבחן χ^2 - חלוקה למקטעים

במבחן χ^2 מחלקים את המרחב למקטעים, או "דליים".

- במקרה בדיד - כל ערך הוא דלי.
- במקרה רציף - צריך לבחור גבולות למקטעים.
- נרצה שבכל מקטע יהיו מספיק תצפיות צפויות.

מבחן χ^2 - חלוקה למקטעים

במבחן χ^2 מחלקים את המרחב למקטעים, או "דליים".

- במקרה בדיד - כל ערך הוא דלי.
- במקרה רציף - צריך לבחור גבולות למקטעים.
- נרצה שבכל מקטע יהיו מספיק תצפיות צפויות.

כללי אצבע

- לפחות 5 אינטרוולים.
- בכל מקטע נרצה בערך:

$$np_j \geq 10$$

- במקרה רציף נוח לבחור מקטעים עם הסתברות שווה:

$$p_j = \frac{1}{k}$$

מבחן Kolmogorov-Smirnov

מבחן KS מתאים במיוחד להשוואה בין נתונים לבין התפלגות רציפה.

מבחן Kolmogorov-Smirnov

מבחן KS מתאים במיוחד להשוואה בין נתונים לבין התפלגות רציפה.
נסדר את התצפיות בסדר עולה:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

מבחן Kolmogorov-Smirnov

מבחן KS מתאים במיוחד להשוואה בין נתונים לבין התפלגות רציפה.
נסדר את התצפיות בסדר עולה:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$$

נחשב לכל תצפית את ערך ההתפלגות המשוערת $F(x_i)$.

מבחן Kolmogorov-Smirnov

מבחן KS מתאים במיוחד להשוואה בין נתונים לבין התפלגות רציפה. נסדר את התצפיות בסדר עולה:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

נחשב לכל תצפית את ערך ההתפלגות המשוערת $F(x_i)$. כמו כן נחשב עבור כל תצפית:

$$D_i^+ = \frac{i}{n} - F(x_i), \quad D_i^- = F(x_i) - \frac{i-1}{n}$$

מבחן Kolmogorov-Smirnov

מבחן KS מתאים במיוחד להשוואה בין נתונים לבין התפלגות רציפה.
נסדר את התצפיות בסדר עולה:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

נחשב לכל תצפית את ערך ההתפלגות המשוערת $F(x_i)$. כמו כן נחשב עבור כל תצפית:

$$D_i^+ = \frac{i}{n} - F(x_i), \quad D_i^- = F(x_i) - \frac{i-1}{n}$$

הסטטיסטי הוא:

$$D = \max\{\max_i D_i^+, \max_i D_i^-\}$$

מבחן Kolmogorov-Smirnov - פירוש

לאחר שמחשבים את D, משווים לערך קריטי מטבלת KS.

מבחן Kolmogorov-Smirnov - פירוש

לאחר שמחשבים את D, משווים לערך קריטי מטבלת KS.

Case	**Adjusted test statistic**	$1-\alpha$				
		0.850	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**
All Parameters known	$\left(\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}\right)D_n$	1.138	1.244	1.358	1.480	1.628
$N(\bar{X}(n), S^2(n))$	$\left(\sqrt{n}-0.01+\frac{0.85}{\sqrt{n}}\right)D_n$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035
$\mathrm{Exp}(\bar{X}(n))$	$\left(\sqrt{n}+0.26+\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right)\left(D_n-\frac{0.2}{n}\right)$	0.926	0.990	1.094	1.190	1.308

אם $D < D_{\text{crit}}$:

מבחן Kolmogorov-Smirnov - פירוש

לאחר שמחשבים את D, משווים לערך קריטי מטבלת KS.

Case	Adjusted test statistic	$1-\alpha$				
		0.850	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**
All Parameters known	$\left(\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}\right)D_n$	1.138	1.244	1.358	1.480	1.628
$N(\bar{X}(n), S^2(n))$	$\left(\sqrt{n}-0.01+\frac{0.85}{\sqrt{n}}\right)D_n$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035
$\mathrm{Exp}(\bar{X}(n))$	$\left(\sqrt{n}+0.26+\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right)\left(D_n-\frac{0.2}{n}\right)$	0.926	0.990	1.094	1.190	1.308

אם $D < D_{\text{crit}}$:

לא דוחים את H_0.

מבחן Kolmogorov-Smirnov - פירוש

לאחר שמחשבים את D, משווים לערך קריטי מטבלת KS.

Case	Adjusted test statistic	$1-\alpha$				
		0.850	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**
All Parameters known	$\left(\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}\right)D_n$	1.138	1.244	1.358	1.480	1.628
$N(\bar{X}(n), S^2(n))$	$\left(\sqrt{n}-0.01+\frac{0.85}{\sqrt{n}}\right)D_n$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035
$\mathrm{Exp}(\bar{X}(n))$	$\left(\sqrt{n}+0.26+\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right)\left(D_n-\frac{0.2}{n}\right)$	0.926	0.990	1.094	1.190	1.308

אם $D < D_{\text{crit}}$:

לא דוחים את H_0.

אם $D \geq D_{\text{crit}}$:

מבחן Kolmogorov-Smirnov - פירוש

לאחר שמחשבים את D, משווים לערך קריטי מטבלת KS.

Case	Adjusted test statistic	$1-\alpha$				
		0.850	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**
All Parameters known	$\left(\sqrt{n}+0.12+\frac{0.11}{\sqrt{n}}\right)D_n$	1.138	1.244	1.358	1.480	1.628
$N(\bar{X}(n), S^2(n))$	$\left(\sqrt{n}-0.01+\frac{0.85}{\sqrt{n}}\right)D_n$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035
$\mathrm{Exp}(\bar{X}(n))$	$\left(\sqrt{n}+0.26+\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right)\left(D_n-\frac{0.2}{n}\right)$	0.926	0.990	1.094	1.190	1.308

אם $D < D_{\text{crit}}$:

לא דוחים את H_0.

אם $D \geq D_{\text{crit}}$:

דוחים את H_0.

מימוש ב-Python

https://colab.research.google.com/drive/1iR0pBdbcYTItFBo45CeO_ZyHeM6rxb_t