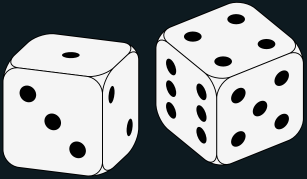


תרגול 4 - דגימה

שיטות בסיסיות לדגימת מספרים אקראיים

על סדר היום

1. מוטיבציה

על סדר היום

1. מוטיבציה
2. דוגמאות לדגימת מספרים מהתפלגויות ידועות

על סדר היום

1. מוטיבציה
2. דוגמאות לדגימת מספרים מהתפלגויות ידועות
3. דגימה באמצעות שיטת הטרנספורם ההופכי - מקרה בדיד ורציף

על סדר היום

1. מוטיבציה
2. דוגמאות לדגימת מספרים מהתפלגויות ידועות
3. דגימה באמצעות שיטת הטרנספורם ההופכי - מקרה בדיד ורציף
4. דגימה באמצעות שיטת קומפוזיציה

דגימה - מוטיבציה

המחשב הוא יצור דטרמיניסטי. אין בפועל הסתברויות.

אז איך בכל זאת מייצרים התנהגות אקראית?

הרעיון המרכזי: נדגום מספר $u \sim U(0, 1)$, ובעזרת טרנספורמציה מתאימה נייצר דגימות כמעט מכל התפלגות שנרצה.

$u \sim U(0, 1)$

↓

המרה מתאימה

↓

נחזיר ערך x מההתפלגות הנדרשת

שיטת טרנספורם הופכי - מקרה בדיד

שיטת טרנספורם הופכי - מקרה בדיד

במקרה הבדיד מחלקים את הקטע $[0, 1]$ ל"דליים" לפי ההסתברויות המצטברות, דוגמים u ומחזירים את הערך המתאים לדלי שבו u נפל.

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

שיטת טרנספורם הופכי - מקרה בדיד

לדוגמה - קובייה הוגנת:

נחלק את הקטע $[0, 1]$ לשישה דליים, דלי עבור כל ערך בין 1 ל6.

אלגוריתם:

1. דגום $u \sim U(0,1)$
2. מצא את x_i הקטן ביותר שעבורו $u \leq F(x_i)$
3. החזר את x_i

שיטת טרנספורם הופכי - מקרה בדיד

לדוגמה - קובייה הוגנת:

נחלק את הקטע $[0, 1]$ לשישה דליים, דלי עבור כל ערך בין 1 ל6.

אלגוריתם:

1. דגום $u \sim U(0, 1)$
2. אם $u < \frac{1}{6}$ החזר 1
3. אם $\frac{1}{6} \leq u < \frac{2}{6}$ החזר 2
4. אם $\frac{2}{6} \leq u < \frac{3}{6}$ החזר 3
5. אם $\frac{3}{6} \leq u < \frac{4}{6}$ החזר 4
6. אם $\frac{4}{6} \leq u < \frac{5}{6}$ החזר 5
7. אחרת החזר 6

דגימת מספרים מהתפלגויות ידועות

1. התפלגות אחידה על הקטע $[a, b]$

$$u \sim U(0, 1),$$
$$x = a + u(b - a)$$

דגימת מספרים מהתפלגויות ידועות

1. התפלגות אחידה על הקטע $[a, b]$

$$u \sim U(0, 1),$$
$$x = a + u(b - a)$$

2. משתנה ברנולי עם הסתברות הצלחה p

$$u \sim U(0, 1),$$
$$x = \begin{cases} 1, & u < p, \\ 0, & .\text{otherwise} \end{cases}$$

עוד דוגמאות להתפלגויות ידועות

3. התפלגות נורמלית סטנדרטית $x \sim N(0,1)$ באמצעות בוקס ומולר

$$
\begin{aligned}
u_1, u_2 &\sim U(0,1), \\
x_1 &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\,\sin(2\pi u_2) \\
x_2 &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\,\cos(2\pi u_2)
\end{aligned}
$$

מקבלים שתי דגימות, שתיהן מההתפלגות הנורמלית, בחרו את החביבה עליכם.

עוד דוגמאות להתפלגויות ידועות

3. התפלגות נורמלית סטנדרטית $x \sim N(0,1)$ באמצעות בוקס ומולר

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &\sim U(0,1), \\ x_1 &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi u_2) \\ x_2 &= \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi u_2) \end{aligned}$$

מקבלים שתי דגימות, שתיהן מההתפלגות הנורמלית, בחרו את החביבה עליכם.

4. התפלגות נורמלית $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

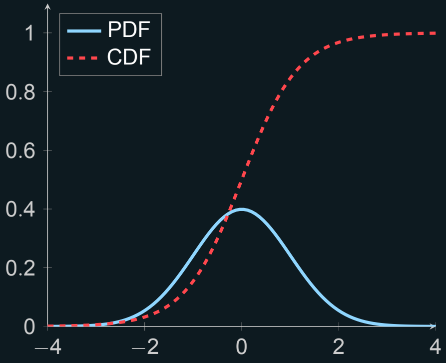
$$\begin{aligned} z &\sim N(0,1), \\ \frac{x-\mu}{\sigma} &= z \\ x &= z\sigma + \mu \end{aligned}$$

שיטת טרנספורם הופכי - מקרה רציף

נתונה פונקציית צפיפות $f(x)$ שממנה רוצים לדגום.

נסמן ב-$F(x)$ את פונקציית ההתפלגות המצטברת $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

אם יודעים לחשב את F^{-1}, האלגוריתם פשוט מאוד.



אלגוריתם:

1. דגום $u \sim U(0,1)$
2. החזר $x = F^{-1}(u)$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

נציב $F(x) = u$ ונקבל:

$$\frac{x-a}{b-a} = u$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

נציב $F(x) = u$ ונקבל:

$$\frac{x-a}{b-a} = u \qquad \Longrightarrow \qquad x = a + u(b-a).$$

דוגמה 1 - התפלגות אחידה

עבור $x \sim U(a,b)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

נציב $F(x) = u$ ונקבל:

$$\frac{x-a}{b-a} = u \qquad \Longrightarrow \qquad x = a + u(b-a).$$

כלומר במקרה זה שיטת הטרנספורם ההופכי מחזירה בדיוק את הנוסחה שכבר ראינו קודם.

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = \ln(1 - u)$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

דוגמה 2 - התפלגות אקספוננציאלית

עבור פרמטר $\lambda > 0$ ו-$x \geq 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

נציב $F(x) = u$:

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

אלגוריתם:

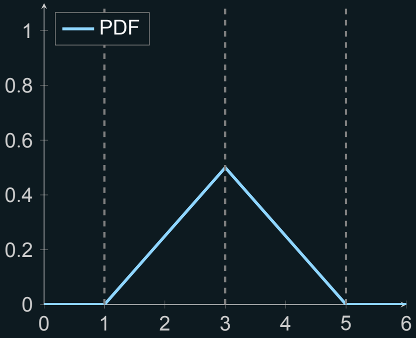
1. דגום $u \sim U(0,1)$
2. החזר $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת

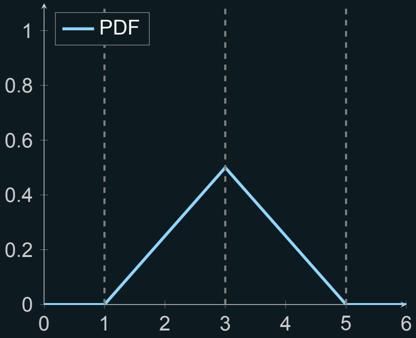
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$



דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת

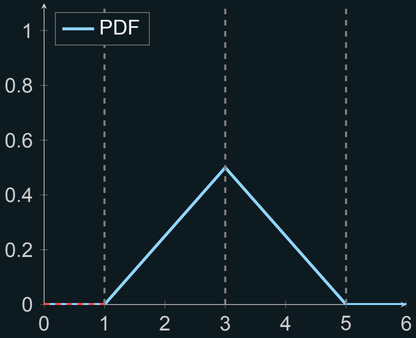


$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x-\frac{1}{4} & 1\le x<3\\ -\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} & 3\le x<5\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} \end{cases}$$

כדי לדגום ממנה נצטרך קודם לחשב את $F(x)$, ואז לפתור את $F(x)=u$ בכל תחום בנפרד.

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

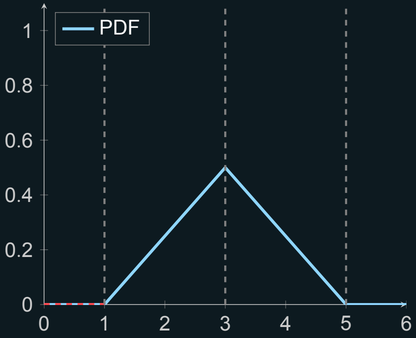
$$F(x) = \begin{cases} \end{cases}$$

$:1 \leq x < 3$

$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx =$$

$:3 \leq x < 5$

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

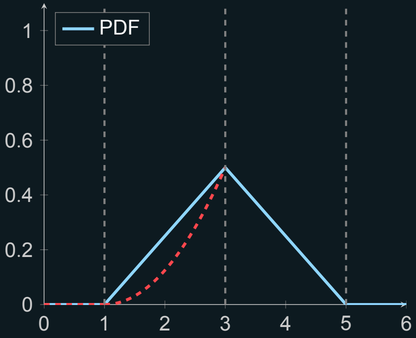
$$F(x) = \begin{cases} \end{cases}$$

$1 \le x < 3$:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x$$

$3 \le x < 5$:

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \le x < 3 \\ & \end{cases}$$

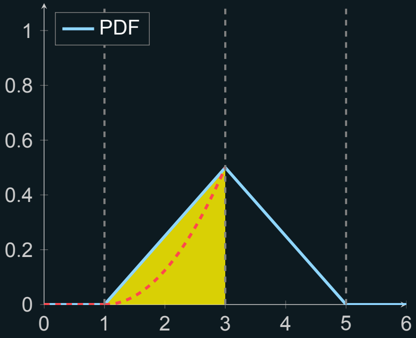
$1 \le x < 3$:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x \quad = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

$3 \le x < 5$:

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \le x < 3 \\ & \end{cases}$$

$1 \le x < 3$:

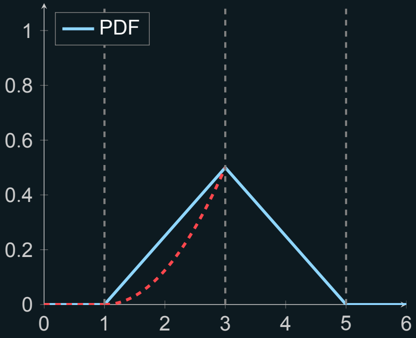
$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x \qquad = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

$3 \le x < 5$:

$$F(3) + \int_3^x \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx$$

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \le x < 3 \\ & \end{cases}$$

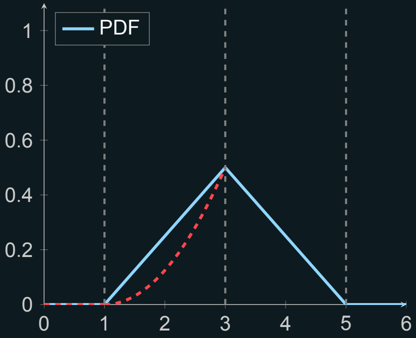
$1 \le x < 3$:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

$3 \le x < 5$:

$$\frac{1}{2} + \int_3^x \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx$$

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \le x < 3 \\ & \end{cases}$$

:$1 \le x < 3$

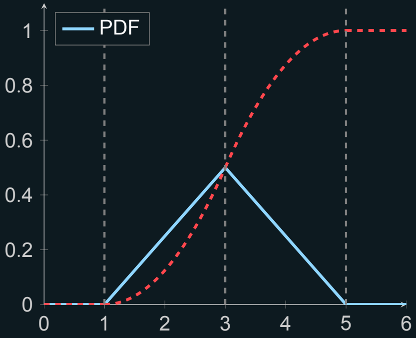
$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

:$3 \le x < 5$

$$\frac{1}{2} + \int_3^x \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x\right)\Bigg|_3^x$$

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

דוגמה 3 - צפיפות רציפה מפוצלת



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \le x < 3 \\ -\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} & 3 \le x < 5 \end{cases}$$

:$1 \le x < 3$

$$\int_1^x \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^x \qquad = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

:$3 \le x < 5$

$$\frac{1}{2} + \int_3^x \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x\right)\Bigg|_3^x \quad = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8}$$

חישוב $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & 1 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} & 3 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

השטח תחת החלק הראשון הוא 0.5, ולכן גם השטח תחת החלק השני הוא $1 - 0.5 = 0.5$.

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

פותרים בעזרת נוסחת השורשים, ובודקים בכל פעם איזה שורש מתאים לגבולות התחום.

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$1 \le x < 3$:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0$$

$3 \le x < 5$:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0$$

פתרון $F(x)=u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \qquad 1\le x<3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \qquad 3\le x<5.$$

:$1\le x<3$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}}$$

:$3\le x<5$

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0$$

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$:1 \le x < 3$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{8}\left(\frac{1}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{8u}$$

$:3 \le x < 5$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0$$

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$1 \le x < 3$:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{8}\left(\frac{1}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{8u} \Rightarrow 1 \pm 2\sqrt{2u}$$

$3 \le x < 5$:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0$$

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$1 \le x < 3$:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{8}\left(\frac{1}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{8u} \Rightarrow 1 \pm 2\sqrt{2u}$$

עבור $u = 0.5$ נקבל כי $1 - 2\sqrt{2u} = -1 \notin [1, 3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3 \le x < 5$:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0$$

פתרון $F(x)=u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \qquad 1\le x<3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \qquad 3\le x<5.$$

$1\le x<3$:

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1\pm\sqrt{8u} \Rightarrow 1+2\sqrt{2u}$$

עבור $u=0.5$ נקבל כי $1-2\sqrt{2u}=-1\notin[1,3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3\le x<5$:

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0$$

פתרון $F(x)=u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \qquad 1\le x<3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \qquad 3\le x<5.$$

$1\le x<3$:

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1\pm\sqrt{8u} \Rightarrow 1+2\sqrt{2u}$$

עבור $u=0.5$ נקבל כי $1-2\sqrt{2u}=-1\notin[1,3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3\le x<5$:

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{4}{8}\left(-\frac{17}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}}$$

פתרון $F(x)=u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \qquad 1\le x<3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \qquad 3\le x<5.$$

$1\le x<3$:

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1\pm\sqrt{8u} \Rightarrow 1+2\sqrt{2u}$$

עבור $u=0.5$ נקבל כי $1-2\sqrt{2u}=-1\notin[1,3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3\le x<5$:

$$-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{17}{8}-u=0 \Rightarrow \frac{-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{4}{8}\left(-\frac{17}{8}-u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 5\pm2\sqrt{2(1-u)}$$

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$1 \le x < 3$:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{8}\left(\frac{1}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{8u} \Rightarrow 1 + 2\sqrt{2u}$$

עבור $u = 0.5$ נקבל כי $1 - 2\sqrt{2u} = -1 \notin [1, 3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3 \le x < 5$:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{4}{8}\left(-\frac{17}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 5 \pm 2\sqrt{2(1-u)}$$

עבור $u = 0.5$ נקבל כי $5 + 2\sqrt{2(1-u)} = 7 \notin [3, 5)$ ולכן השורש הזה נפסל.

פתרון $F(x) = u$ בכל תחום

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \qquad 1 \le x < 3,$$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \qquad 3 \le x < 5.$$

$1 \le x < 3$:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{8}\left(\frac{1}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{8u} \Rightarrow 1 + 2\sqrt{2u}$$

עבור $u = 0.5$ נקבל כי $1 - 2\sqrt{2u} = -1 \notin [1,3)$ ולכן השורש הזה נפסל.

$3 \le x < 5$:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{17}{8} - u = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{4}{8}\left(-\frac{17}{8} - u\right)}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 5 - 2\sqrt{2(1-u)}$$

עבור $u = 0.5$ נקבל כי $5 + 2\sqrt{2(1-u)} = 7 \notin [3,5)$ ולכן השורש הזה נפסל.

הפתרון המפורש

$$x = 1 + 2\sqrt{2u}, \qquad 0 < u < 0.5,$$
$$x = 5 - 2\sqrt{2(1-u)}, \qquad 0.5 \le u < 1.$$

אלגוריתם:

1. דגום $u \sim U(0,1)$
2. אם $0 < u < 0.5$ החזר $1 + 2\sqrt{2u}$
3. אחרת החזר $5 - 2\sqrt{2(1-u)}$

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות.

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות. לדוגמא:

בהסתברות 0.2 נקבל את $f_1(x)$ ובהסתברות 0.8 נקבל את $f_2(x)$.

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות. לדוגמא:

בהסתברות 0.2 נקבל את $f_1(x)$ ובהסתברות 0.8 נקבל את $f_2(x)$.

באפשרותינו:

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות. לדוגמא:

בהסתברות 0.2 נקבל את $f_1(x)$ ובהסתברות 0.8 נקבל את $f_2(x)$.

באפשרותינו:

1. לחבר את ההתפלגויות לפונקציה אחת משותפת ולבצע עליה טרנספורם הופכי או קבלה-דחייה (עליה נרחיב בהמשך).

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות. לדוגמא:

בהסתברות 0.2 נקבל את $f_1(x)$ ובהסתברות 0.8 נקבל את $f_2(x)$.

באפשרותינו:

1. לחבר את ההתפלגויות לפונקציה אחת משותפת ולבצע עליה טרנספורם הופכי או קבלה-דחייה (עליה נרחיב בהמשך).
2. לבצע קומפוזיציה - נדגום u_1 כסלקטור המבחין בין ההתפלגויות ו u_2 לצורך הדגימה מתוך ההתפלגויות עצמן.

קומפוזיציה

נתונות לנו שתי פונקציות צפיפות תקניות $f_1(x), f_2(x)$ ונתונה לנו ההסתברות שנקבל כל אחת מהפונקציות. לדוגמא:

בהסתברות 0.2 נקבל את $f_1(x)$ ובהסתברות 0.8 נקבל את $f_2(x)$.

באפשרותינו:

1. לחבר את ההתפלגויות לפונקציה אחת משותפת ולבצע עליה טרנספורם הופכי או קבלה-דחייה (עליה נרחיב בהמשך).
2. לבצע קומפוזיציה - נדגום u_1 כסלקטור המבחין בין ההתפלגויות ו u_2 לצורך הדגימה מתוך ההתפלגויות עצמן.

אלגוריתם דגימה מתאים לדוגמא שלפנינו:

1. דגום $u_1, u_2 \sim U(0, 1)$
2. אם $u_1 < 0.2$, דגום מ- f_1 באמצעות u_2
3. אחרת, דגום מ-f_2 באמצעות u_2

קומפוזיציה לצפיפות שאינה מוכרת ישירות

1. קומפוזיציה

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \le x < b \\ f_2(x), & b \le x < c \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = p_1 f_1'(x) + p_2 f_2'(x)$$

2. מחשבים משקולות

$$p_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx, \qquad p_2 = \int_b^c f_2(x)\,dx$$

3. מנרמלים

$$f_1'(x) = \frac{f_1(x)}{p_1}, \qquad f_2'(x) = \frac{f_2(x)}{p_2}$$

4. מציאת אלגוריתם דגימה לכל פונקציה.
5. כתיבת אלגוריתם הדגימה הסופי.

שאלה לדוגמה

במשתלת החיוכים חמש שישיות מהצמחים הם סוקולנטים והנותרים הם צמחי תבלין.

התפלגות הגובה של סוקולנט מפולגת לפי פונקציית הצפיפות הבאה, בס"מ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(x-5) & 5 < x < 15 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

התפלגות גובה שתיל תבלין מפולגת אחיד בין 20 ס"מ ל-30 ס"מ.

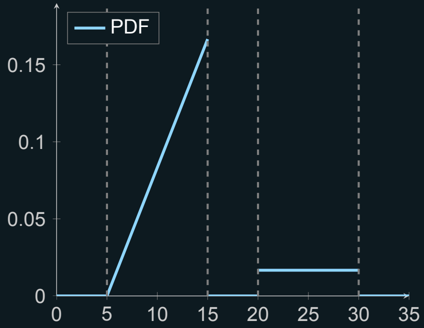
פתחו אלגוריתם דגימה לגובה צמח המשתלה בעזרת מספרים אקראיים מ-$U(0,1)$ המתבצעות בהרצה אחת שלו.

אפשרות א

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{50}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

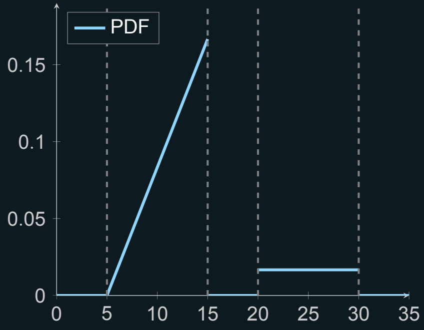
אפשרות א



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{60} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

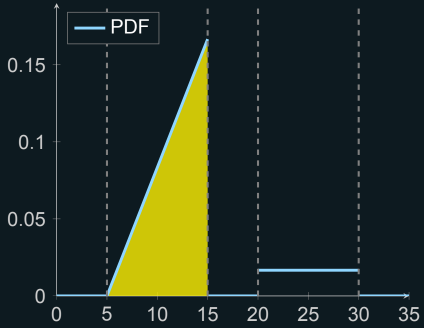
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

אפשרות א



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{60} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אפשרות א



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{60} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

:$5 < x < 15$

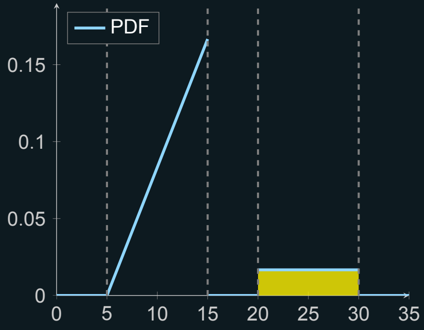
$$F(5 < x < 15) = u \Rightarrow u = \frac{1}{60}\left(0.5x^2 - 5x\right) + \frac{5}{24}$$

$$x = \frac{10 + \sqrt{100 - 4(25 - 120u)}}{2}$$

$$u = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 15, \qquad u = 0 \Rightarrow x = 5$$

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
جامعة بن غوريون في النقب
Ben-Gurion University of the Negev

אפשרות א



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{60} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

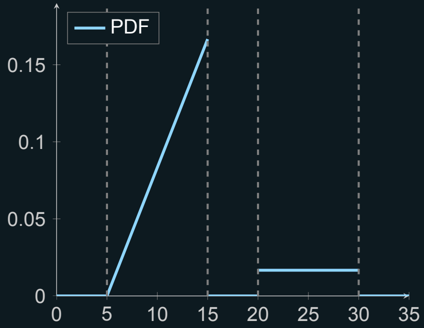
:$20 < x < 30$

$$F(20 < x < 30) = u \Rightarrow u = \frac{x-20}{60} + \frac{5}{6}$$

$$x = 60u - 30$$

$$u = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 20, \qquad u = 1 \Rightarrow x = 30$$

אפשרות א



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}(x-5) & 5 < x < 15 \\ \frac{1}{60} & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אלגוריתם:

1. דגום $u \sim U(0,1)$
2. אם $0 < u < \frac{5}{6}$ החזר $\frac{10+\sqrt{100-4(25-120u)}}{2}$
3. אחרת החזר $60u - 30$

אפשרות ב

$$F(5 < x < 15) = u \Rightarrow u = \frac{1}{50}\left(0.5x^2 - 5x\right) + 0.25$$

$$x = \frac{10 + \sqrt{100 - 4(25 - 100u)}}{2}$$

$$u = 1 \Rightarrow x = 15, \qquad u = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$F(20 < x < 30) = u \Rightarrow u = \frac{x - 20}{10}$$

$$x = 10u + 20$$

$$u = 0 \Rightarrow x = 20, \qquad u = 1 \Rightarrow x = 30$$

אלגוריתם:

1. דגום $u_1, u_2 \sim U(0,1)$
2. אם $0 < u_1 < \frac{5}{6}$ החזר $\frac{10+\sqrt{100-4(25-100u_2)}}{2}$
3. אחרת החזר $10u_2 + 20$

מימוש ב-Python

https://colab.research.google.com/drive/
1Y2yQwhYakcy7H-VgB5xieje1afpfSl7v?usp=
sharing